



# Séminaire Laurent Schwartz

## EDP et applications

Année 2012-2013


Stéphane Seuret

**Quelques résultats d'analyse multifractale en analyse**

*Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications* (2012-2013), Exposé n° XVI, 21 p.

<[http://sersedp.cedram.org/item?id=SLSEDP\\_2012-2013\\_\\_\\_\\_\\_A16\\_0](http://sersedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2012-2013_____A16_0)>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz,  
École polytechnique, 2012-2013.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques  
Le Bois-Marie • Route de Chartres  
F-91440 BURES-SUR-YVETTE  
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
UMR 7640 CNRS/École polytechnique  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<http://www.math.polytechnique.fr/>

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## QUELQUES RÉSULTATS D'ANALYSE MULTIFRACTALE EN ANALYSE

STÉPHANE SEURET

ABSTRACT. Dans cet article de synthèse, nous donnons quelques résultats d'analyse multifractale en analyse, et expliquons quelles sont les perspectives de recherche mêlant EDP et analyse multifractale.

### 1. INTRODUCTION

L'analyse multifractale consiste en l'étude des comportements locaux et des propriétés d'invariance d'échelle des fonctions, des mesures, des trajectoires de processus stochastiques, des ensembles, des signaux et des images ... bref de nombreux objets mathématiques. L'intérêt et l'originalité de l'analyse multifractale proviennent beaucoup de ses fortes interactions avec de nombreux domaines des mathématiques (analyse, probabilités, théorie ergodique), de la physique (mécanique des fluides, ...) et du traitement du signal et de l'image. C'est donc un domaine très vaste, dans cet article de synthèse je vais présenter des résultats d'analyse multifractale en analyse; pour les résultats en théorie ergodique et systèmes dynamiques, on pourra consulter [26]; pour les liens avec la théorie métrique des nombres, je ne connais pas d'article général; pour des applications à l'image, on ira voir par exemple [1]; pour un ouvrage général sur les fractales, on consultera [3, 18].

Je vais donc détailler les multiples raisons pour lesquelles on est amené à s'intéresser aux spectres multifractals et donc à la répartition géométrique des singularités d'un objet (déterministe ou aléatoire), rappeler les résultats principaux justifiant la présence de phénomènes multifractals en analyse, et je terminerai par quelques perspectives de recherche mêlant EDP/EDS et analyse multifractale.

### 2. ANALYSE MULTIFRACTALE DE FONCTIONS

**2.1. Origines, définitions.** Historiquement, l'analyse multifractale a été introduite en physique pour interpréter certaines observations expérimentales en liaison avec la théorie de Kolmogorov de la turbulence pleinement développée. Dans les années 1940, Kolmogorov a mis en évidence le rôle central en turbulence joué par la "fonction d'échelle" définie de la façon suivante: Si

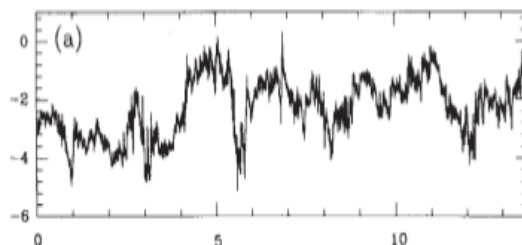


FIGURE 1. Signal 1D de vitesse d'un écoulement turbulent [17].

$v(x)$  désigne la vitesse à un instant donné de l'écoulement en  $x \in \Omega$ , un domaine borné, on définit pour n'importe quel nombre réel  $q \in \mathbb{R}$  la quantité

$$S(q, l) = \int_{\Omega} |v(x+l) - v(x)|^q dx.$$

Dans le modèle K41, Kolmogorov modélisait les petites fluctuations de la vitesse d'un écoulement à l'aide d'un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst  $H = 1/3$ , et obtenait ainsi théoriquement un comportement en loi d'échelle pour les moments de la vitesse de la forme, pour tout  $q \geq 0$ ,

$$S(q, l) \sim |l|^{qH} \quad \text{lorsque } |l| \text{ tend vers } 0.$$

Mais très tôt, les expérimentations ont montré qu'en réalité

$$(1) \quad S(q, l) \sim |l|^{\zeta(q)} \quad \text{lorsque } |l| \text{ tend vers } 0.$$

où l'application  $q \mapsto \zeta(q)$ , appelée la *fonction d'échelle* de la vitesse, est une fonction concave, croissante. Cela a été définitivement confirmé au milieu des années 1980, par des données expérimentales obtenues en soufflerie par Y. Gagne [17] à l'ONERA à Modane (voir la figure 1 pour le signal de vitesse 1D d'un écoulement turbulent).

Evidemment cette forme typique pour la fonction d'échelle a mis à mal une grande partie des modèles proposés jusqu'alors pour la turbulence. La stricte concavité de cette fonction d'échelle associée à une fonction est cependant une propriété assez commune en analyse, par exemple elle est prouvée pour de nombreuses fonctions déterministes (séries de Fourier, séries d'ondelettes, séries de Davenport, intégrales de mesures de Gibbs) et de processus aléatoires (intégrales de cascades aléatoires de Mandelbrot, de cascades poissoniennes, ...).

En 1985, U. Frisch et G. Parisi [16] ont proposé d'expliquer cette forme de  $\zeta(q)$  par des fluctuations rapides de la régularité ponctuelle de la vitesse de l'écoulement. En effet, les *exposants de Hölder* mesurés pour des signaux réels issus de la turbulence (par exemple le signal de la figure 1) varient extrêmement rapidement d'un point à un autre (et de façon irrégulière), et cela expliquerait la concavité de la fonction d'échelle, par le raisonnement

suivant. Rappelons tout d'abord comment quantifier ce comportement local d'une fonction.

**Définition 2.1.** Soit  $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ , et  $x \in \mathbb{R}^d$ . On dit que  $f \in C^\alpha(x)$  lorsque l'on peut trouver une constante  $C > 0$  et un polynôme  $P$  de degré plus petit que  $[\alpha]$  (la partie entière de  $\alpha$ ) tel que, pour  $y$  suffisamment proche de  $x$ ,

$$|f(y) - P(y - x)| \leq C|y - x|^\alpha.$$

Alors, l'exposant ponctuel de Hölder en un point  $x$  de  $f$  est

$$(2) \quad h_f(x) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x)\},$$

Lorsque l'exposant est plus petit que 1, il prend une forme particulièrement simple:

$$h_f(x) = \liminf_{y \rightarrow 0} \frac{\log |f(y) - f(x)|}{\log |y - x|}.$$

Comme dit précédemment, l'exposant ponctuel  $h_f(x)$  peut être une quantité très fluctuante avec  $x$ . Ainsi, on peut calculer l'exposant ponctuel de Hölder d'une fonction  $f$  en tout point  $x$ , mais si l'on veut décrire véritablement toute la variété de ses comportements locaux, il est naturel de chercher à décrire la répartition géométrique des singularités de  $f$ . Cela est réalisé via l'étude du spectre multifractal, défini comme suit.

**Définition 2.2.** L'ensemble iso-Hölder des singularités d'ordre  $h$  d'une fonction  $f$  est défini par

$$E_f(h) = \{x : h_f(x) = h\}.$$

Le spectre multifractal d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'application

$$h \longmapsto \dim E_f(h).$$

Dans cette définition,  $\dim$  désigne la dimension de Hausdorff, qui est la notion pertinente à retenir pour distinguer entre eux les ensembles iso-höldériens. En effet, les objets que nous rencontrerons par la suite possèdent des ensembles de niveau  $E_f(h)$  qui sont souvent *fractals*, denses, aléatoires, et qui sont typiquement de mesure de Lebesgue soit nulle, soit pleine. Ainsi, l'outil judicieux pour les distinguer entre eux ne peut pas être la mesure de Lebesgue ni la dimension de Minkowski (ou dimension de boîte), qui attribue la dimension de l'espace ambiant à tout ensemble dense dans cet espace.

Ce spectre multifractal procure une description globale de la répartition géométrique des singularités locales. Le terme "multifractal" s'applique à une fonction (une mesure, un processus, un signal, ...) dont les exposants de régularité varient (typiquement, pas de façon continue) d'un point à un autre, et donc, pour laquelle plusieurs ensembles iso-Hölder  $E_f(h)$  sont non-vides. Autrement dit, son spectre multifractal possède un support non-réduit à un point.

Revenons à Frisch et Parisi, dont l'idée était que la non-linéarité de la fonction d'échelle provient de la présence de différents comportements locaux

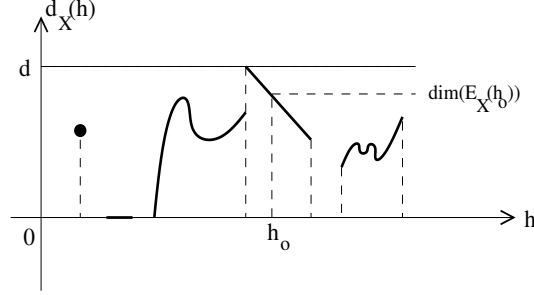


FIGURE 2. Exemple de spectre multifractal

(donc la multifractalité de la vitesse). Leur heuristique était la suivante: Supposons que la vitesse ait des exposants ponctuels  $h_v(x)$  qui peuvent différer selon le point  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Pour tous les points  $x \in \mathbb{R}^3$  en lesquels  $h_v(x) = h$ , on a

$$|v(x+l) - v(x)| \sim |l|^h.$$

En supposant que  $\dim E_v(h) = d_v(h) > 0$ , alors il y a à peu près  $|l|^{-d_v(h)}$  boîtes de taille  $|l|$  (donc de volume  $|l|^3$ ) qui contiennent des  $x$  dont l'exposant vaut  $h$ . Ainsi,

$$S(q, l) = \int_{\Omega} |v(x+l) - v(x)|^q dx \sim \int_h |l|^{qh} |l|^{-d_v(h)} |l|^3 dh \sim \int_h |l|^{qh - d_v(h) + 3} dh.$$

Lorsque  $l \rightarrow 0$ , la contribution la plus importante sous l'intégrale est obtenue pour l'exposant

$$\zeta(q) = \inf_h (qh - d_v(h) + 3).$$

qui explique ainsi la concavité de la fonction  $\zeta$ . De plus, par transformée de Legendre inverse, on obtient la formule

$$(3) \quad d_v(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (qh - \zeta(q) + 3),$$

qui nous suggère également une forme concave pour les spectres d'objets ayant de bonnes propriétés d'invariance d'échelle (pour lesquels la fonction  $\zeta$  est, on l'espère, plus facile à calculer).

**Définition 2.3.** On appelle formalisme multifractal la formule (3), ou toute formulation équivalente, liant via une transformée de Legendre le spectre multifractal à une fonction d'échelle calculée sur la fonction. Lorsqu'il y a effectivement égalité entre le spectre multifractal d'une fonction  $f$  en l'exposant  $h \geq 0$  et la transformée de Legendre associée, on dit que le formalisme multifractal est vérifié en  $h$  par  $f$ .

Évidemment la formule (3) est fondée sur une succession d'approximations qui peut la rendre au premier abord farfelue. Ce qui la rend précisément étonnante est le fait qu'elle soit en réalité valable (peut-être pas sous cette formulation exactement, mais sous des formes approchées) pour un nombre

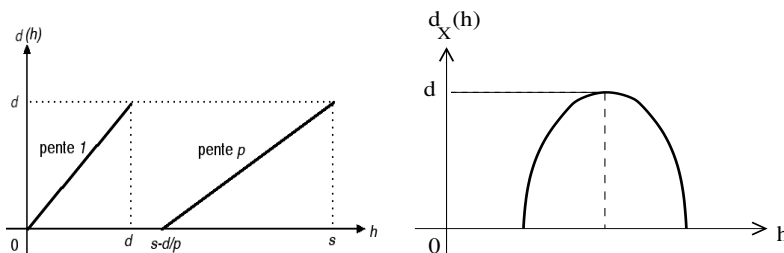


FIGURE 3. Allures typiques de spectre multifractal

impressionnant d'objets mathématiques. Par exemple, si l'on remplace la définition (1) de la fonction d'échelle  $\zeta(q)$  par la définition plus consistante

$$\eta_f(q) := \sup \left\{ s > 0 : f \in B_{q,loc}^{s/q,\infty}(\mathbb{R}^d) \right\},$$

un résultat de S. Jaffard [24] prouve que le formalisme multifractal est vérifié pour presque toute fonction au sens de Baire dans un espace de Besov  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$  dans une certaine gamme d'exposants  $h$  (nous y reviendrons dans la section 4.1).

Trouver les domaines de validité de cette formule ou de ses généralisations, expliquer et comprendre les raisons de son échec, requiert l'étude fine des structures et des comportements locaux de divers types d'objets mathématiques. Dans tous les cas, elle donne lieu à la fois dans le domaine théorique et dans le domaine des applications à de nombreuses recherches.

Une question naturelle, au vu de l'apparition des multifractales en turbulence, est celle de la pertinence de ce type de modèles dans les phénomènes physiques et dans les mathématiques. Par exemple, on pourrait croire que la plupart des objets ont des propriétés de régularité locale peu intéressantes ou triviales:

- la fonction de Weierstrass

$$W_H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-nH} \sin(a^n x), \quad a > 1$$

est monofractale: pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h_{W_H}(x) = H$ .

- les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement monofractales d'exposant  $1/2$  (attention, elles ne sont pas globalement  $C^{1/2}(\mathbb{R})$ ).

- "Presque toutes" les fonctions continues sur  $\mathbb{R}^d$  ont un exposant ponctuel de Hölder égal à 0 en chaque point  $x \in \mathbb{R}^d$ . Ici, "presque toutes" fait référence à la propriété de généricité au sens des catégories de Baire: une propriété est génériquement vraie dans un espace complet  $E$  lorsqu'elle est vraie sur un ensemble résiduel dans  $E$  (i.e. sur le complémentaire d'un ensemble maigre). Pour démontrer la généricité, les ensembles résiduels sont généralement obtenus comme intersection dénombrable d'ouverts denses.

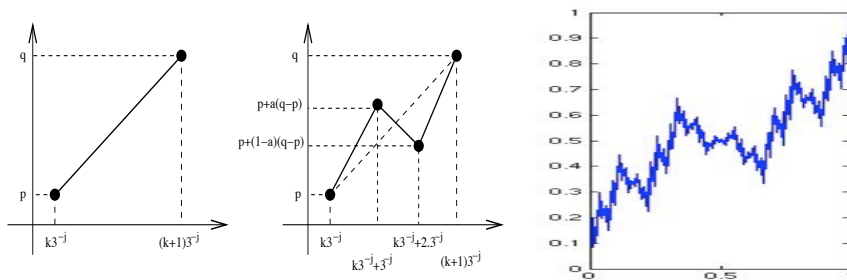


FIGURE 4. Fonction de “Bourbaki” à droite, obtenue par itération du découpage du segment décrit sur les deux images de gauche.

De même, on se convainc que “presque toutes” les fonctions appartenant à  $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$  sont monofractales d’exposant  $\alpha$ .

Mais en réalité, les comportements *multifractals* sont très communs, et, comme nous allons le constater, finalement très naturels. Ces fluctuations de la régularité locale se manifestent dans plusieurs contextes:

- Nous avons déjà mentionné celui de la turbulence.
- De nombreuses fonctions “historiques” obtenues comme somme infinie de contributions élémentaires: séries de Fourier lacunaires, séries d’ondelettes, série d’autres blocs élémentaires.... sont multifractales. L’exemple typique en la fonction “non-différentiable” de Riemann (voir figure 5 et la sous-section suivante). On parle parfois de *chaos additif* lorsqu’il est nécessaire de renormaliser les sommes pour les faire converger.
- Toute fonction qui possède un ensemble dénombrable de discontinuité est multifractale: l’archétype aléatoire de ce type d’objets est les processus de Lévy, dont on sait qu’ils sont multifractals depuis les travaux de S. Jaffard [23].
- Les fonctions auto-similaires, i.e. satisfaisant une équation fonctionnelle du type

$$Z(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \cdot Z \circ (S_k)^{-1}(x) + w(x),$$

où les  $(S_k)_{k=1, \dots, N}$  sont des similitudes,  $w$  une fonction suffisamment continue,  $(\lambda_k)_{k=1, \dots, N}$  des réels, sont multifractales (voir Figure 4). Beaucoup de questions profondes concernant les propriétés multifractales de ce type de fonctions sont en suspens lorsque les similitudes ne satisfont pas à certaines conditions de séparations de leurs images.

- On expliquera plus tard que, au sens de Baire, les fonctions génériques dans un espace de Besov  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$  sont multifractales.

Ainsi, les propriétés multifractales sont assez communes pour les fonctions, et on expliquera qu'elles ne résultent pas nécessairement d'une structure auto-similaire.

L'analyse multifractale occupe également un rôle grandissant dans beaucoup de domaines hors mathématiques, notamment via le formalisme multifractal décrit par (3). Le formalisme multifractal est fondamental en ce qu'il justifie l'introduction des multifractales dans la physique, le traitement du signal et de l'image, et plus généralement toutes les applications. En effet, il est absolument impossible de construire des estimateurs du spectre multifractal d'un signal: avant d'arriver à  $d_f(h)$ , il faut au moins passer par quatre limites de natures différentes. Cependant, lorsque l'objet  $f$  est bien fait, c'est-à-dire s'il possède des propriétés d'auto-similarité (déterministe ou statistique), ou s'il est aléatoire, il est naturel d'espérer que  $f$  satisfasse à un formalisme multifractal. Pour calculer son spectre, il suffit alors de construire des estimateurs de la fonction d'échelle  $S(q, l)$ , ce qui est tout à fait raisonnable: les méthodes les plus communes utilisent des méthodes de régression sur diagrammes log-log.

Ainsi, les méthodes multifractales, fondées sur des résultats mathématiques, fournissent des méthodes de classification de signaux et d'images [1]. Elles sont ainsi aujourd'hui de plus en plus répandues, et leur utilisation, notamment dans le domaine physiologique (par exemple, pour la détermination de paramètres caractéristiques pour les battements cardiaques), devient systématique.

**2.2. Un exemple de fonction multifractale : La fonction “non-différentiable” de Riemann.** Cette série de Fourier lacunaire a été proposée par Riemann dans les années 1850 comme exemple de fonction continue nulle part dérivable

$$R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n^2}.$$

En réalité,  $R$  est dérivable en certains points, les rationnels  $p/q$  avec  $p, q$  impairs, et  $p \wedge q = 1$ . Plus de 120 ans ont été nécessaires pour trouver ce résultat, après des travaux de Riemann, Weierstrass, Hardy [20], Gerver [19], et son spectre multifractal a été identifié en 1996 par S. Jaffard [22]. Pour comprendre la raison de la multifractalité de  $R$ , une idée de Hardy consiste à en prendre la convolution avec l'ondelette  $\psi(x) = (x + i)^{-2}$ , puis (retranscrit en langage moderne) à en étudier la transformée en ondelettes associée:

$$W_R(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} R(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

Un calcul de résidus montre que

$$(4) \quad W_R(a, b) = a(2 \cdot \theta(b + ia) - 1),$$



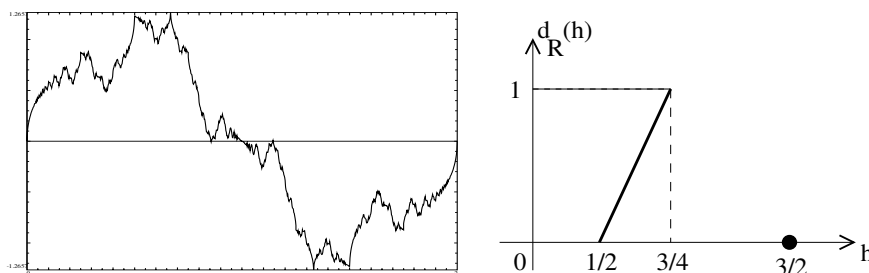


FIGURE 5. Fonction “non-différentiable” de Riemann, et son spectre multifractal.

où  $\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}$  est la fonction Theta de Jacobi. On s’intéresse au comportement de  $W_R(a, b)$  lorsque  $a$  petit (ce qui correspond au comportement de la fonction dans ses hautes fréquences). On utilise alors le théorème suivant.

**Théorème 2.1.** *Si  $f \in C^h(x_0)$ , alors il existe  $C > 0$  telle que*

$$(5) \text{ pour tout } b \text{ proche de } x_0, \text{ pour tout } a, \quad |W_f(a, b)| \leq C(a + |b - x_0|)^h.$$

*Réciproquement, si (5) est vraie, alors  $f \in C^{h-\varepsilon}(x_0)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

Intuitivement, ce qu’il faut retenir est que si  $W_R(a, x_0) \sim a^h$  lorsque  $a \rightarrow 0^+$ , alors  $h_R(x_0) = h$ . D’après (4), il faut donc étudier le comportement de la fonction  $\Theta$  au voisinage de  $\mathbb{R}^+$ , i.e. quand  $a \rightarrow 0^+$ . Malheureusement, la divergence de la fonction  $\Theta$  n’est pas uniforme au voisinage de l’axe des réels. Par exemple, on a

$$|\Theta(z)| \leq C|\text{Im}(z)|^{-1/2} \text{ au voisinage de } 0$$

et

$$|\Theta(z)| \leq C|z - 1|^{-1/2} \exp(\pi \text{Im}(-1/(z - 1))) \text{ au voisinage de } 1$$

Comme la fonction  $\Theta$  vérifie les équations fonctionnelles  $\theta(z + 2) = \theta(z)$  et  $\theta(-1/z) = \theta(z)$ , le comportement de  $\Theta$  au voisinage d’un point dans l’orbite de 0 (resp. 1) engendrée par le groupe modulaire a le même comportement qu’en 0 (resp. 1). Alors, pour étudier le comportement de  $W_R(a, b)$  lorsque  $a \rightarrow 0^+$  pour  $b$  proche d’un point donné  $x_0$ , il faut déterminer quels sont les rationnels dans l’orbite de 0 ou de 1 qui approchent le mieux  $x_0$ . On voit apparaître ici des problèmes d’approximation diophantienne: on démontre finalement que l’exposant de  $R$  au point  $x_0$  vaudra l’inverse du taux d’approximation de  $x_0$  par les points rationnels de l’orbite de 1 par le groupe modulaire, i.e. par les rationnels de la forme  $p/q$ , avec  $p, q$  impairs [22]. Le spectre obtenu est donné figure 5.

L’analyse multifractale des séries de Fourier est toujours active (voir [15, 27], ou [9] pour un point de vue un peu différent), par exemple on ne connaît

pas le spectre multifractal de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^3 \pi x)}{n^2} \quad !!!$$

### 3. ANALYSE MULTIFRACTALE DE MESURES

**3.1. Dimension locale d'une mesure.** Dans les années 1970, les physiciens avaient déjà remarqué que les irrégularités mesurées dans la vitesse d'un fluide turbulent reflètent le fait que l'énergie s'y dissipe de façon hétérogène, probablement sur des ensembles "petits" (de dimension  $< 3$ ). Mandelbrot avait proposé un modèle, connu aujourd'hui sous le nom de *cascade multiplicative aléatoire*, pour modéliser ce phénomène de grande variabilité. La régularité locale en  $x$  d'une mesure  $\mu$  à support dans  $\mathbb{R}^d$  est quantifiée de la façon suivante.

**Définition 3.1.** Soit  $\mu$  une mesure borélienne positive finie sur  $\mathbb{R}^d$ . On appelle dimension locale de  $\mu$  en  $x \in \text{Supp}(\mu)$  la quantité

$$h_\mu(x) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r},$$

où  $B(x, r)$  désigne la boule de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

Comme pour les exposants de fonctions, les dimensions locales de mesures varient typiquement fortement d'un point à un autre. On définit alors les ensembles de niveau  $E_\mu(h) = \{x : h_\mu(x) = h\}$  et le spectre multifractal de  $\mu$  par

$$d_\mu(h) := \dim\{x : h_\mu(x) = h\}.$$

Pour les mesures également on peut définir un formalisme multifractal.

**Définition 3.2.** La fonction d'échelle  $\tau_\mu(q)$  associée à  $\mu$ , parfois appelée fonction de partition ou  $L^q$ -spectrum en anglais, se définit ainsi:

$$(6) \quad \tau_\mu : q \in \mathbb{R} \mapsto \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{-1}{j} \log_2 \sum \mu(I)^q,$$

la somme étant prise sur tous les cubes dyadiques  $I$  de génération  $j$  de  $\mathbb{R}^d$  et de  $\mu$ -masse non-nulle.

Evidemment la formule donnant  $\tau_\mu$  doit être adaptée au contexte, les boîtes dyadiques n'étant pas toujours les mieux adaptées (penser à une mesure portée par l'ensemble triadique de Cantor!), et la somme pouvant être remplacée par une intégrale.

**Définition 3.3.** Le formalisme multifractal est vérifié pour la mesure  $\mu$  en l'exposant  $h$  lorsque  $d_\mu(h)$  se retrouve comme la transformée de Legendre de la fonction d'échelle, i.e.

$$(7) \quad d_\mu(h) = (\tau_\mu)^*(h) := \inf\{qh - \tau_\mu(q) : q \in \mathbb{R}\}.$$

Cette formule rappelle, et est liée, au théorème de Cramer et les problèmes de grandes déviations. Sous certaines hypothèses, les cascades multiplicatives aléatoires de Mandelbrot vérifient ce formalisme presque sûrement. Ainsi ces cascades constituent rétrospectivement le premier modèle de mesures multifractales. Depuis, le formalisme multifractal a été démontré pour un nombre impressionnant de mesures, notamment les mesures de Gibbs associées à des potentiels höldériens, invariantes par certains systèmes dynamiques suffisamment mélangeants, les cascades multiplicatives aléatoires et les cascades infiniment divisibles, par exemple.

**3.2. Lien avec la théorie ergodique.** L'analyse multifractale et le formalisme associé ont été également introduits, presque simultanément, dans les systèmes dynamiques et la théorie ergodique, via le formalisme thermodynamique. Soit  $T : X \rightarrow X$  un système dynamique, et  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction höldérienne (appelée *potentiel*). Depuis le théorème de récurrence de Poincaré, on s'intéresse à la valeur moyenne que prend le potentiel  $\varphi$  sur l'orbite d'un point  $x$  donné sous l'action de  $T$ . Soit la  $n$ -ième somme de Birkhoff

$$S_n\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x).$$

D'après le théorème de Birkhoff, pour tout potentiel  $\varphi \in L^1(d\mu)$ , si  $\mu$  est  $T$ -invariante et ergodique, alors les moyennes des sommes de Birkhoff convergent  $\mu$ -presque sûrement:

$$\text{pour } \mu\text{-p.t. } x \in X, \quad \frac{1}{n}S_n\varphi(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_X \varphi d\mu.$$

Ainsi, étant donnée une mesure  $\mu$ , on est capable de calculer la limite des moyennes de Birkhoff associées au potentiel  $\varphi$ , sur un ensemble de points  $x$  de mesure  $\dim \mu$  (la dimension de la mesure  $\mu$ ).

L'analyse multifractale d'un potentiel  $\varphi$  donné consiste en la question suivante, en quelque sorte complémentaire du théorème de Birkhoff. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Quelle est la dimension de l'ensemble

$$\tilde{E}_\varphi(\alpha) := \left\{ x \in X : \frac{1}{n}S_n\varphi(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha \right\} ?$$

Le spectre multifractal de  $\varphi$  est alors la fonction  $\alpha \mapsto \dim \tilde{E}_\varphi(\alpha)$ . Le lien entre ce spectre et celui présenté plus haut est le suivant (l'analogie est valable pour des systèmes beaucoup plus généraux, sous réserve de l'existence de partitions de Markov et de propriétés de mélange par exemple): lorsque  $X = [0, 1]$  et  $T$  est le shift  $x \mapsto 2x \bmod 1$ , alors pour toute fonction  $\varphi$  höldérienne, on peut trouver une mesure  $\mu_\varphi$  (la *mesure de Gibbs* associée au potentiel  $\varphi$ ) telle que: il existe une constante  $C > 1$ , un nombre réel  $P$  (la pression de  $\varphi$ ) qui vérifient que pour tout intervalle dyadique  $I_n(x)$  de

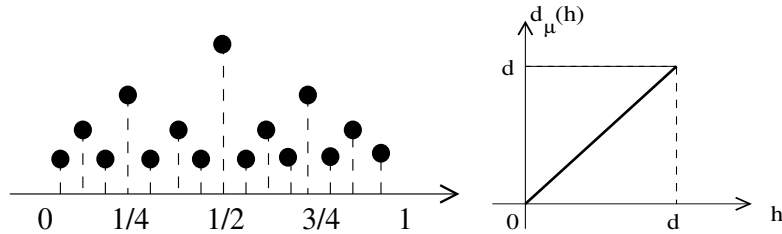


FIGURE 6. Mesure  $\mu$ , et son spectre multifractal

génération  $n$  contenant  $x$ , on a

$$C^{-1} \leq \frac{\mu_\varphi(I_n(x))}{e^{S_n\varphi(x) - nP}} \leq C.$$

Ainsi, dire qu'un point  $x \in X$  appartient à l'ensemble  $\tilde{E}_\varphi(\alpha)$  est équivalent à ce que la mesure  $\mu_\varphi$  ait une dimension locale  $(\alpha - P)/\log 2$  en  $x$ . Finalement, les deux analyses multifractales (de la mesure  $\mu_\varphi$  et du potentiel  $\varphi$ ) sont équivalentes.

Toute une communauté s'intéresse à l'analyse des mesures de Gibbs et des mesures auto-similaires et auto-affines. La littérature est foisonnante, les résultats liant souvent des problèmes de géométrie (métrique, fractale), théorie ergodique et théorie des grandes déviations. Je ne me risquerai pas à une bibliographie, forcément incomplète, je renvoie le lecteur intéressé à [26] pour une introduction à ce sujet. L'analyse multifractale des mesures harmoniques (Jones et Wolff, Lawler, Duplantier, Belaev,...) est également importante en analyse harmonique, car elle est liée à la géométrie des bords du domaine considéré; finalement, peu de choses sont connues dans ce domaine...

**3.3. Un exemple: La mesure dyadique de Lévy.** On considère la mesure

$$\mu = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} \sum_{k \text{ impair}} 2^{-j} \delta_{k2^{-j}}$$

Une analyse rapide de cette mesure permet de se convaincre immédiatement qu'elle est multifractale: en chaque dyadique est posée une masse de Dirac, la dimension locale de  $\mu$  y est donc nulle. Par ailleurs, par le théorème de Lebesgue, toute mesure possède forcément des points de dérivabilité (de dimension locale supérieure à 1, par existence de la densité locale). Ainsi, au moins deux ensembles iso-höldériens associée à  $\mu$  sont non-vides.

Pour analyser ce type de mesures, l'idée est la suivante: Plus un point  $x$  est proche de (une infinité de) grandes discontinuités, plus la régularité de  $\mu$  en  $x$  est mauvaise. Ainsi, pour des objets discontinus, la régularité locale en un point est liée à un "taux d'approximation par la famille des discontinuités". Nous allons démontrer que la dimension locale de  $\mu$  en  $x$

dépend du taux d'approximation de  $x$  par la famille de points dyadiques  $\{(k2^{-j}, 2^{-j})\}_{j \geq 1, k \in \{0, \dots, 2^j\}}$ .

**Définition 3.4.** *Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on appelle  $\delta_x$  le taux d'approximation de  $x$  par les dyadiques défini par*

$$\delta_x = \sup\{\delta \geq 1 : |x - k2^{-j}| \leq 2^{-\delta j} \text{ pour une infinité de } j \text{ et } k\}.$$

Observons que l'on peut se restreindre aux entiers  $k$  impairs dans la définition qui précède. Forcément  $\delta_x \geq 1$ , et il est connu que pour Lebesgue-presque tout  $x$ ,  $\delta_x = 1$ .

**Lemme 3.1.** *Pour tout  $x$  non-dyadique,  $h_\mu(x) = 1/\delta_x$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in [0, 1]$  avec un taux d'approximation  $\delta_x < +\infty$  par les nombres dyadiques. Si  $x \in B(k2^{-j}, (2^{-j})^{\delta_x - \varepsilon})$  (avec  $k$  impair), alors on a  $\mu(B(x, (2^{-j})^{\delta_x - \varepsilon})) \geq \mu(\{k2^{-j}\}) = 2^{-j}/j^2$ . Pour ce  $x$  fixé, cela se produit pour une infinité de  $j$ , donc

$$\begin{aligned} h_\mu(x) &= \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(B(x, (2^{-j})^{\delta_x - \varepsilon}))}{\log (2^{-j})^{\delta_x - \varepsilon}} \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^{-j}/j^2}{\log (2^{-j})^{\delta_x - \varepsilon}} = \frac{1}{\delta_x - \varepsilon}. \end{aligned}$$

C'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , ainsi, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $h_\mu(x) \leq 1/\delta_x$ .

Pour démontrer l'inégalité inverse, avec un petit peu de travail, on utilise la répartition uniforme des nombres dyadiques dans l'intervalle  $[0, 1]$ .  $\square$

Le spectre multifractal de  $\mu$  s'écrit alors

$$d_\mu(h) = \dim\{x : h_\mu(x) = h\} = \dim\left\{x : \frac{1}{\delta_x} = h\right\} = \dim\left\{x : \delta_x = \frac{1}{h}\right\}.$$

Pour calculer explicitement  $d_\mu$ , on peut alors utiliser le principe de transfert de masse de Beresnevich et Velani.

**Théorème 3.1.** [10] *Pour tout  $\delta \geq 1$ ,  $\dim\{x : \delta_x = \delta\} = 1/\delta$ .*

Le lecteur averti remarquera que le théorème précédent dans sa version originale est beaucoup trop puissant pour notre cas particulier, mais c'est ce même théorème (ou des variantes) que l'on utilise dans des contextes plus délicats.

On en déduit alors le spectre multifractal de  $\mu$ .

**Théorème 3.2.** *Pour tout  $h \in [0, 1]$ ,*

$$d_\mu(h) = \dim\left\{x : \delta_x = \frac{1}{h}\right\} = \frac{1}{1/h} = h.$$

*De plus, si  $h > 1$ ,  $E_\mu(h) = \emptyset$ .*

On trouve donc une forme affine (ici linéaire) croissante pour le spectre multifractal de  $\mu$ . La démarche que nous avons mise en oeuvre dans un exemple simpliste est en réalité beaucoup plus générale qu'il n'y paraît:

pour énormément d'objets (mesures discontinues, processus de Lévy, fonctions dans des espaces de Besov, solutions d'équations stochastiques type diffusion), l'approche pour trouver le spectre multifractal est semblable: on cherche à démontrer l'existence de comportements spécifiques (discontinuités, grandes oscillations locales, gros coefficients d'ondelettes, ...), on étudie la répartition de ces événements singuliers, et on regarde finalement, pour chaque point  $x$  donné, la position de  $x$  vis-à-vis des ces familles de points singuliers. On pourra même dans ces cas beaucoup plus complexes continuer à faire appel au théorème de Beresnevich et Velani, qui permet de calculer la dimension de Hausdorff d'ensembles de points approchés à différentes vitesses par des familles quelconques de points (sous réserve que ces familles soient suffisamment bien réparties dans  $\mathbb{R}^d$  du point de vue de la mesure de Lebesgue), ou alors à des généralisations de ce théorème dans des cas hétérogènes où la mesure de Lebesgue n'est plus l'outil judicieux pour décrire la répartition des familles [5, 6, 7].

#### 4. QUELQUES RÉSULTATS EN ANALYSE

**4.1. Généricité des mesures multifractales.** Étant donnée une mesure borélienne positive finie sur  $\mathbb{R}^d$ , son spectre multifractal est toujours majoré par des quantités dépendant de la fonction d'échelle  $\tau_\mu(q)$ .

**Proposition 4.1.** *Pour une mesure, on a toujours*

$$\text{pour tout } h \geq 0, \quad d_\mu(h) \leq (\tau_\mu)^*(h) := \inf_{q \in \mathbb{R}} (qh - \tau_\mu(q)).$$

En particulier, pour toute mesure dont le support est tout le cube  $[0, 1]^d$ , on a toujours  $\tau_\mu(d) = 0$ , ce qui entraîne la majoration suivante:

$$\text{pour tout } h \geq 0, \quad d_\mu(h) \leq \min(h, d).$$

En général, le spectre multifractal  $d_\mu$  d'une mesure est donc situé sous la diagonale (voir figure 7). Rappelons que grâce au théorème de Lebesgue, on sait que toute mesure finie admet une dimension locale plus grande que  $d$  sur un ensemble de mesure de Lebesgue pleine.

Or, on a construit précédemment une mesure supportée par l'intervalle  $[0, 1]$  (la mesure dyadique de Lévy) qui avait la "pire" régularité possible, au sens où elle donnait la plus grande dimension possible aux ensembles iso-höldériens de régularité la plus faible. Ce résultat de multifractalité est en fait le même pour un ensemble générique de mesures.

**Théorème 4.1.** *Dans l'ensemble des mesures de probabilité dont le support est inclus dans  $[0, 1]^d$  (muni de la topologie \*-faible), les mesures vérifient génériquement au sens de Baire le formalisme multifractal pour tout  $h \in [0, d]$ , et elles ont un spectre linéaire croissant de pente  $d$ :*

$$d_\mu(h) = h \quad \text{pour tout } h \in [0, d].$$

Ce théorème a été étendu par F. Bayart aux mesures supportées par un compact quelconque [8].

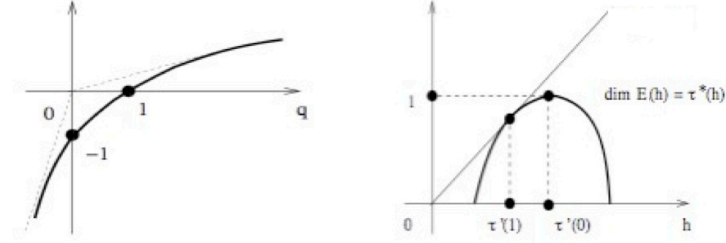


FIGURE 7. Allure d'une fonction d'échelle  $\tau_\mu$  et sa transformée de Legendre en dimension 1.

**4.2. Généricité des fonctions multifractales.** Pour les fonctions, on n'a pas en général la majoration  $d_f(h) \leq \eta_f^*(h)$ , comme on l'a pour les mesures. Cependant, il existe des majorations *a priori* sur le spectre multifractal, en utilisant d'autres formalismes que celui présenté dans l'introduction, voir [25]. On peut tout de même prouver des résultats génériques de multifractalité, comparables à ceux pour les mesures.

**Théorème 4.2.** [24] *Dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$  (avec  $s - d/p > 0$ ), les fonctions ont génériquement un spectre linéaire croissant de pente  $p$  (voir figure 8)*

$$d_f(h) = p(h - s) + d \text{ pour tout } h \in [s - d/p, s].$$

On peut également s'intéresser au comportement multifractal des traces d'une fonction. Étant donnée une fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , une question importante concerne la régularité des traces de  $f$  sur les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^3$  (notamment les sous-espaces affines). Ces problèmes s'apparentent à ceux du calcul de dimensions des traces et projections sur des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^3$  d'ensembles (fractals ou non) vivant naturellement dans  $\mathbb{R}^3$ , et sont évidemment fondamentaux pour l'étude multifractale de solutions d'EDP (pour lesquels on a besoin de connaître le comportement au bord du domaine de définition). C'est également important pour l'interprétation que l'on a faite de la multifractalité de la vitesse d'un écoulement turbulent, dont on a seulement mesuré la multifractalité pour ses traces 1D. On démontre le théorème suivant [2]:

**Théorème 4.3.** *Soit  $1 \leq d < D$  deux entiers. Pour tout  $a \in \mathbb{R}^{D-d}$ , on note  $\mathcal{H}_a$  l'hyperplan*

$$\mathcal{H}_a = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D : x_{d+1} = a_1, x_{d+2} = a_2, \dots, x_D = a_{D-d}\}.$$

*Considérons deux réels positifs  $s$  et  $p$  tels que  $s - D/p > 0$ . Supposons*

*Pour toute fonction  $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ , pour Lebesgue-presque tout  $a \in \mathbb{R}^{D-d}$ , la trace de  $f$  sur  $\mathcal{H}_a$ , notée  $f_a$ , appartient à  $\bigcap_{s' < s} B_{p,\infty}^{s'}(\mathbb{R}^d)$ . Si  $q < p$ , on a même  $f_a \in B_{p,qp/(p-q)}^s([0, 1]^d)$ .*

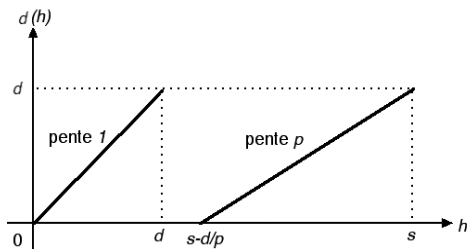


FIGURE 8. Spectre d'une mesure générique à support égal à  $[0, 1]^d$  (à gauche), d'une fonction générique dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$  (à droite).

De plus, au sens de la prévalence, pour presque toute fonction de  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$ , pour Lebesgue-presque tout  $a \in \mathbb{R}^{D-d}$ , la trace  $f_a$  de  $f$  sur  $\mathcal{H}_a$  possède les propriétés multifractales suivantes:

- les exposants ponctuels de  $f_a$  sont tous entre  $s - d/p$  et  $s$ ,
- pour tout  $h \in [s - d/p, s]$ , le spectre de  $f_a$  vaut

$$d_{f_a}(h) = p(h - (s - d/p)).$$

Ce théorème montre que les traces de  $f$  sur des hyperplans affines ont une régularité meilleure que celle garantie par les théorèmes de trace classiques (on sait qu'a priori les traces de fonctions de  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^D)$  appartiennent à  $B_{p,q}^{s-(D-d)/p}(\mathbb{R}^d)$ , on montre que presque toute trace appartient en fait  $B_{p,qp/(q-p)}^s(\mathbb{R}^d)$ , ainsi on ne perd de la régularité qu'en l'indice  $q$ ). De plus, on calcule le spectre de singularités de ces traces, et on montre que dans l'espace des traces, la régularité presque sûre n'est pas la pire possible. Ce résultat est très frappant, car dans tous les autres exemples connus, la régularité presque sûre est toujours la "pire", au sens où toutes les dimensions des ensembles iso-Höldériens associés aux exposants les plus petits possibles sont saturées. Ce résultat s'étend à des traces sur des sous-variétés de  $\mathbb{R}^D$ .

Je donne une idée de la démonstration du Théorème 4.2, en dimension 1, en considérant les fonctions supportées par l'intervalle  $[0, 1]$ .

*Preuve.* Soit  $f \in B_p^{s,\infty}([0, 1])$ , on veut démontrer que  $\dim E_f(h) \leq p(h - s) + 1$  pour tout  $h \in [s - 1/p, s]$ .

Il est pratique ici d'utiliser la décomposition en ondelettes d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ : On écrit

$$f(x) = \sum_j \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

où  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthogonale d'ondelettes ayant plus de  $[s] + 1$  moments nuls. Alors l'espace de Besov  $B_p^{s,\infty}([0, 1])$  peut être caractérisé par



la décroissance des coefficients d'ondelettes. En effet,

$$B_p^{s,\infty}([0,1]) = \left\{ f : (a_j)_{j \geq 1} \in l^\infty \right\}, \quad \text{où } a_j = \left( 2^{j(ps-1)} \sum_k |d_{j,k}|^p \right)^{1/p}.$$

L'exposant ponctuel de Hölder est également caractérisé par la décroissance des coefficients d'ondelettes.

**Théorème 4.4.** *Si  $f \in C^h(x_0)$ , alors il existe  $C > 0$  telle que pour tous  $j$  et  $k$ ,*

$$(8) \quad |d_{j,k}| \leq C(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^h.$$

*Réciproquement, si (8) est satisfaite, alors  $f \in C^{h-\varepsilon}(x_0)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

Le théorème 4.4 peut s'interpréter de la façon suivante: Pour avoir un exposant  $h$ , il faut que  $x_0$  vérifie simultanément

$$(9) \quad |d_{j,k}| = 2^{-jh'} \geq 2^{-jh} \quad \text{et} \quad |k2^{-j} - x_0| \leq 2^{-jh'/(h+2\varepsilon)},$$

une infinité de fois pour tout  $\varepsilon > 0$ , sinon (8) n'est pas respectée. On retrouve donc l'idée développée lors de l'analyse multifractale de la mesure de Lévy: plus un point  $x$  est proche d'un gros coefficient d'ondelettes (d'une infinité d'entre eux), plus son exposant ponctuel de Hölder est faible.

On est donc amené à dénombrer l'ensemble

$$N_{j,\varepsilon}(h') = \{k \in \{0, \dots, 2^j\} : 2^{-j(h'+\varepsilon)} \leq |d_{j,k}| \leq 2^{-j(h'-\varepsilon)}\}.$$

**Lemme 4.1.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $\#N_j(h', \varepsilon) \leq C2^{j(p(h'-s+\varepsilon)+1)}$ .*

*Preuve.* Comme  $f \in B_p^{s,\infty}([0,1])$ , on a nécessairement

$$C \geq 2^{j(ps-1)} \sum_k |d_{j,k}|^p \geq 2^{j(ps-1)} (\#N_j(h', \varepsilon)) 2^{-jp(h'+\varepsilon)}.$$

□

On en vient à la majoration du spectre multifractal de  $f$ . Rappelons nous la contrainte (9). Celle-ci nous impose que (un petit effort de réflexion en convaincra le lecteur...)

$$(10) \quad E_f(h) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{s-1/p-\varepsilon/2 \leq h' \leq h+\varepsilon/2} \bigcap_{J \geq 1} \bigcup_{j \geq J} \bigcup_{k \in N_j(h', \varepsilon)} B(k2^{-j}, 2^{-jh'/(h+\varepsilon)}).$$

Pour majorer  $\dim E_f(h)$ , on se doit de trouver des recouvrements de  $E_f(h)$ . Fixons  $\varepsilon > 0$  et

$$\delta = (h + \varepsilon)p - p(s - 1/p - \varepsilon) \quad (> ph - p(s - 1/p)),$$

ainsi qu'une génération  $J$  telle que  $2^{-J(s-1/p-\varepsilon)/(h+\varepsilon)} \leq \eta$ . Un recouvrement de  $E_f(h)$  est alors fourni par

$$(11) \quad \bigcup_{\substack{h' \in [s-1/p-\varepsilon/2, s+\varepsilon/2]: \\ h' \text{ s'écrit } s-1/p-\varepsilon/2+i\varepsilon, i \in \mathbb{N}}} \bigcup_{j \geq J} \bigcup_{k \in N_j(h', \varepsilon)} B(k2^{-j}, 2^{-jh'/(h+\varepsilon)}),$$

où l'on a discrétisé l'union en  $h'$  dans le terme de droite de l'inclusion (10). Observons que par le choix de  $J$ , ce recouvrement ne contient que des boules de rayon plus petit que  $\eta$ .

On peut alors majorer la prémesure de Hausdorff  $\delta$ -dimensionnelle de  $E_f(h)$  de la façon suivante:

$$\mathcal{H}_\eta^\delta(E_f(h)) \leq \sum_{\substack{h' \in [s-1/p-\varepsilon/2, s+\varepsilon/2]: \\ h' = s-1/p-\varepsilon/2+i\varepsilon}} \sum_{j \geq J} \sum_{k \in N_j(h', \varepsilon)} \left| B(k2^{-j}, 2^{-jh'/(h+\varepsilon)}) \right|^\delta$$

où la première somme est prise sur les mêmes indices que dans (11). Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\eta^\delta(E_f(h)) &\leq C \sum_{\substack{h' \in [s-1/p-\varepsilon/2, s+\varepsilon/2]: \\ h' = s-1/p-\varepsilon/2+i\varepsilon}} \sum_{j \geq J} 2^{j(p(h'-s+\varepsilon)+1)} (2^{-jh'/(h+\varepsilon)})^\delta \\ &\leq C \sum_{\substack{h' \in [s-1/p-\varepsilon/2, s+\varepsilon/2]: \\ h' = s-1/p-\varepsilon/2+i\varepsilon}} \sum_{j \geq J} 2^{j(1+p\varepsilon-ps)(1-h'/(h+\varepsilon))}. \end{aligned}$$

Par nos choix de paramètres, lorsque  $\varepsilon$  est assez petit, tous les exposants  $(1+p\varepsilon-ps)(1-h'/(h+\varepsilon))$  qui interviennent dans la puissance  $2^j$  sont négatifs et majorés par  $(1+p\varepsilon-ps)(1-(h+\varepsilon/2)/(h+\varepsilon))$ . Ainsi,

$$\mathcal{H}_\eta^\delta(E_f(h)) \leq C\varepsilon 2^{-J(1+p\varepsilon-ps)(1-(h+\varepsilon/2)/(h+\varepsilon))} \rightarrow 0 \text{ quand } J \rightarrow +\infty.$$

Cela nous fournit l'inégalité  $\dim(E_f(h)) \leq \delta$ , valable pour tout  $\delta \geq p(h-s+\varepsilon)+1+\varepsilon$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient la majoration voulue.

Là encore, la minoration du spectre est plus délicate; je donne la trame de la démonstration. Grâce au calcul précédent, on comprend comment maximiser la dimension de chaque ensemble iso-hölderien  $E_f(h)$ : il suffit de répartir au mieux les coefficients d'ondelettes de chaque ensemble  $N_j(h', \varepsilon)$ , pour tous les  $h'$  et  $\varepsilon$ , simultanément. On démontre que cela peut être réalisé en construisant une fonction, via ses coefficients d'ondelettes, qui possède cette propriété. On pourra se convaincre que la fonction dont les coefficients d'ondelettes sont donnés par

$$d_{j,k} = 2^{-j(s-1/p)} \mu([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}])^p,$$

où  $\mu$  est la mesure dyadique de Lévy, convient. Il reste alors à construire un ensemble résiduel dans  $B_p^{s,\infty}([0,1])$  dans lequel toute fonction est multifractale...  $\square$

**4.3. Forme des spectres multifractals.** Mentionnons ici quelques questions d'analyse, qui restent ouvertes.

- Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction exposant  $x \mapsto h_f(x)$  est forcément une limite inférieure d'une suite de fonctions continues (c'est une caractérisation exacte). Cependant, pour une mesure  $\mu$ , la situation est différente, comme soulignée par le lemme suivant [13].

**Lemme 4.2.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité supportée par  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Si l'application  $x \mapsto h_\mu(x)$  est continue, elle est forcément constante égale à  $d$ .*

Peut-on caractériser la fonction “dimension locale” d’une mesure?

- Par des résultats de [21, 13] on sait que toute fonction positive réglée  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  peut être un spectre multifractal d’une fonction ou d’une mesure (sous réserve qu’elle vérifie les contraintes naturelles d’un spectre, i.e.  $g(h) \leq d$  pour une fonction et  $g(h) \leq \min(h, d)$  pour une mesure). Mais quelle est la forme la plus générale d’un spectre?

- Pour beaucoup de fonctions et mesures, le spectre multifractal est *homogène*, en ce sens que la restriction de la fonction (ou de la mesure) à n’importe quel sous-ensemble non-trivial de son ensemble de définition possède le même spectre que la fonction initiale. Dans [13], on démontre qu’une telle propriété influence fortement la forme du spectre multifractal d’une mesure.

**Théorème 4.5.** *Soit  $\mu$  supportée par  $[0, 1]$ , dont le spectre multifractal est homogène. Alors le support du spectre  $\text{Support}(d_\mu) \cap [0, 1]$  est nécessairement un intervalle de la forme  $[\alpha, 1]$ , où  $0 \leq \alpha \leq 1$ .*

Y a-t’il d’autres contraintes sur les spectres? L’homogénéité des spectres est-elle vraie pour des mesures auto-similaires sans condition de séparabilité de l’ensemble ouvert?

## 5. MULTIFRACTALES ET EDO/EDP/EDS?

Le lien entre multifractales et EDP/EDO est intime, car la problématique multifractale est issue de considérations EDPistes. Rappelons les seuls théorèmes connus de multifractalité pour des équations différentielles ou à dérivées partielles.

**5.1. L’équation de Burgers avec condition initiale brownienne.** Le seul résultat connu de multifractalité pour une solution d’EDP est obtenu pour l’équation de Burgers dans le cas de viscosité nulle

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0 \\ u(x, 0) = B_x \quad (\text{mouvement brownien}) \end{cases} ,$$

où la condition au temps 0 est donnée par un mouvement brownien  $(B_x)_{x \geq 0}$ . Le mouvement brownien est l’unique processus gaussien continu dont les accroissements sont stationnaires et indépendants. Pour de plus amples explications, je renvoie le lecteur à l’article de J. Bertoin [11] et à l’article de présentation [12].

La multifractalité, presque sûre, de la solution  $x \mapsto u(x, t)$ , pour tout  $t > 0$ , résulte de la conjonction exceptionnelle de trois résultats qui sont eux-mêmes délicats:

- Pour cette équation il existe des solutions explicites. A l’aide de techniques fondées sur l’étude des temps de passage d’un mouvement brownien

avec dérive, J. Bertoin démontre que, presque sûrement, pour tout  $t > 0$ , la solution  $x \mapsto u(x, t)$  conserve la propriété remarquable que ses accroissements soient stationnaires et indépendants [11].

- Par un résultat classique de théorie des processus stochastiques, les seuls processus vérifiant cette propriété sont connus: ce sont les processus de Lévy. L'équation de Burgers créant naturellement des chocs (donc des discontinuités) lorsque la condition initiale est très irrégulière, les processus de Lévy en question ne peuvent pas être des mouvements browniens, ce sont des processus stables.

- S. Jaffard (1999) a réalisé l'analyse multifractale des processus de Lévy dans [23].

Ces processus sont des processus à sauts, avec une infinité de discontinuités, répartis uniformément sur  $[0, 1]$  (donc denses). Leur analyse est, dans l'esprit, réalisée de la même façon que la mesure purement discontinue dyadique: on a une famille aléatoire de discontinuités, et plus un point  $x$  est proche de ces discontinuités, plus la régularité de la trajectoire du processus est mauvaise.

### 5.2. Une équation intégrale stochastique à solution multifractale.

L'idée développée dans [4] est de nature différente. On cherche un processus solution d'une équation intégrale stochastique qui possède des propriétés multifractales. Pour ceci, considérons:

- $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$  une fonction **lipschitzienne croissante**.
- la fonction:  $G(\beta, z) := (1 + z)^{-1/\gamma(\beta)}$ .
- Une mesure de Poisson  $N(ds, dz) = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n, Z_n)}(ds, dz)$  sur  $[0, 1] \times [1, +\infty)$  d'intensité  $ds dz$ .

Les points  $\mathcal{P} = ((T_n, Z_n))_{n \geq 1}$  sont uniformément distribués, suivant la mesure de Lebesgue, sur la bande  $[0, 1] \times [1, +\infty)$ .

Soit  $\mathcal{F}_t := \sigma(\{N(A), A \in \mathcal{B}([0, t] \times [0, \infty))\})$  la filtration associée à  $N$ .

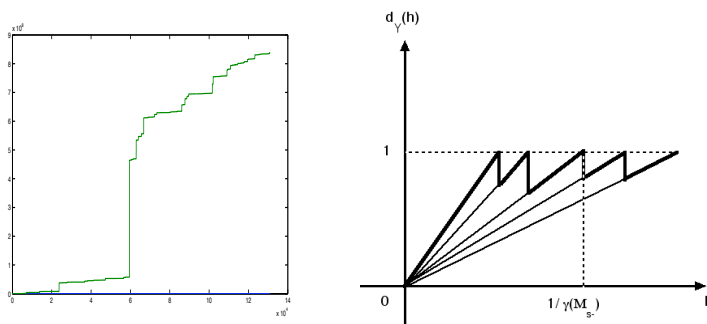
**Théorème 5.1.** *Il existe un unique processus de Markov fort  $M = (M_t)_{t \in [0, 1]}$ , issu de 0, càdlàg, strictement croissant, associé à  $(\mathcal{F}_t)$ , qui est solution de l'équation intégrale stochastique*

$$M_t = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(M_{s-}, z) N(ds, dz).$$

Là aussi, on a un processus purement discontinu. En effet, Le processus  $M$  vérifie:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t \int_0^{+\infty} G(M_{s-}, z) N(ds, dz) = \sum_{T_n: (T_n, Z_n) \in \mathcal{P} \text{ et } T_n \leq t} G(M_{T_n-}, Z_n) \\ &= \sum_{T_n: (T_n, Z_n) \text{ et } T_n \leq t} (1 + Z_n)^{1/\gamma(M_{T_n-})}. \end{aligned}$$

Une trajectoire de ce processus est représentée Figure 9.

FIGURE 9. Une trajectoire du processus  $M$ , et son spectre multifractal.

En utilisant le même type d'arguments d'approximation par des familles aléatoires, on démontre que la régularité de  $M$  en  $t$  dépend de la façon dont  $t$  est approché par les points du processus de Poisson. L'originalité ici provient du fait que l'on démontre que les trajectoires de  $M$  ont des spectres multifractals aléatoires, explicites, que l'on peut calculer en fonction de la trajectoire. Ce travail a nécessité de nouveaux résultats sur les recouvrements aléatoires [7].

**5.3. Qu'espérer de raisonnable?** Si l'idée d'espérer démontrer la multifractalité de solutions d'EDP ayant une condition initiale déterministe semble totalement hors de portée, elle devient plus raisonnable lorsque la condition initiale est aléatoire. En effet, la répartition aléatoire des comportements oscillants ou des éventuelles discontinuités permet d'envisager d'appliquer des techniques multifractales de calcul de dimension. Ainsi, des résultats comme ceux obtenus par N. Burq et N. Tzvetkov [14], qui trouvent des formules explicites pour des solutions de certaines EDP à conditions initiales aléatoires faiblement régulières distribuées selon une mesure de probabilité  $\nu$  dont le support est un espace de Sobolev  $H^s$ , semblent un point d'entrée vers des résultats nouveaux. Dans ce cas précis, comme la solution est essentiellement obtenue comme la solution initiale (transportée par un flot linéaire) plus une fonction très régulière, le comportement multifractal de la solution au temps  $t$  sera essentiellement le même que celui de la condition initiale. Il ne reste donc qu'à étudier le spectre multifractal des conditions initiales appartenant au support de la mesure  $\nu$ ...

## REFERENCES

- [1] P. Abry, S. Jaffard, S. Roux, Function spaces vs. scaling functions: tools for image classification. *Mathematical image processing*, 1–39, Springer Proc. Math., 5, Springer, Heidelberg, 2011.
- [2] J.-M. Aubry, D. Maman, S. Seuret, Local behavior of traces of Besov functions: Prevalent results, with J.-M. Aubry, D. Maman. *J. Func. Anal.* 264(3) 631-660, 2013.
- [3] J. Barral, J. Beresticky, J. Bertoin, A.-H. Fan, B. Haas, S. Jaffard, G. Miermont, J. Peyrière, *Quelques interactions entre analyse, probabilités et fractals*, Panoramas et Synthèses, numéro 32, 2010.

- [4] J. Barral, N. Fournier, S. Jaffard, S. Seuret, *A pure jump Markov process with a random singularity spectrum*, Ann. Proba., 38 (5) 1924–1946, 2010.
- [5] J. Barral, S. Seuret, *Heterogeneous ubiquitous systems in  $R^d$  and Hausdorff dimensions*, Bull. Brazilian Math. Soc., 38(3), 467-515, 2007.
- [6] J. Barral, S. Seuret, *Ubiquity and large intersections properties under digit frequencies constraints*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 145(3) 527-548, 2008.
- [7] J. Barral, S. Seuret, *A localized Jarnik-Besicovich theorem*, Adv. Math. 226(4) 3191-3215, 2011.
- [8] F. Bayart, *Any compact set supports a lot of multifractal measures*, Nonlinearity, 26 353-367, 2013.
- [9] F. Bayart, Y. Heurteaux, *Multifractal analysis of the divergence of Fourier series*. Ann. Sc. ENS, 45, 927-946, 2012.
- [10] V. Beresnevich, S. Velani, *A mass transference principle and the Duffin-Schaeffer conjecture for Hausdorff measures*. Ann. of Math. (2) 164 (3) 971–992, 2006.
- [11] J. Bertoin, *The Inviscid Burgers Equation with Brownian Initial Velocity*, Comm. Math. Phys. 193(2) 397-406, 1998.
- [12] J. Bertoin, S. Jaffard, *Solutions multifractales de l'équation de Burgers*, Matapli N.52 pp.19–28, octobre 1997.
- [13] Z. Buczolich, S. Seuret, *Measures and Functions with prescribed singularity spectrum*, À paraître dans J. Fract. Geom., 2014.
- [14] N. Burq, N. Tzvetkov, *Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I: Local theory*, Invent. Math. 173, No. 3, 449-475, 2008.
- [15] F. Chamizo, A. Ubis, *Multifractal behavior of polynomial Fourier series*, Preprint, 2012.
- [16] U. Frisch, G. Parisi, *Fully developed turbulence and intermittency*, Proc. International Summer school Phys., Enrico Fermi, 84-88, North Holland, 1985.
- [17] Y. Gagne, *Étude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe et turbulence développée*. Thèse de l'université de Grenoble, 1987.
- [18] Numéro spécial de la “Gazette des mathématiciens” en hommage à Benoît Mandelbrot, Avril 2013, Editeurs: S. Jaffard, S. Seuret, Société Mathématique de France.
- [19] J. Gerver, *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of  $\pi$* . Amer. J. Math. 92 1970 33–55.
- [20] G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. 17, 301–325, 1916.
- [21] S. Jaffard, *Construction de fonctions multifractales ayant un spectre de singularités prescrit*, C.R.A.S. Vol. 315 Série 1, pp. 19–24, 1992.
- [22] S. Jaffard, *The spectrum of singularities of Riemann's function*. Rev. Mat. Iberoamericana 12 (2) 441–460, 1996.
- [23] S. Jaffard, *The multifractal nature of Lévy processes*, Probab. Theory Related Fields, 114(2):207-227, 1999.
- [24] S. Jaffard, *On the Frisch-Parisi conjecture*. J. Math. Pures Appl. (9) 79 (6) 525–552, 2000.
- [25] S. Jaffard, *Beyond Besov spaces. II. Oscillation spaces*, Constr. Approx., 21, 29–61, 2004.
- [26] Y. Pesin, H. Weiss, *The Multifractal Analysis of Gibbs Measures: Motivation, Mathematical Foundation, and Examples*, Chaos, 7:1 (1997) 89-106.
- [27] T. Rivoal, S. Seuret, *Hardy-Littlewood series and even continued fractions*, À paraître dans J. Anal. Math., 2014.

STÉPHANE SEURET, LAMA, UMR CNRS 8050, UNIVERSITÉ PARIS-EST, LAMA (UMR 8050), UPEMLV, UPEC, CNRS, F-94010, CRÉTEIL, FRANCE